

De quin costat cauen les torrades?

UN ESTUDI ESTADÍSTIC SOBRE LA LLEI DE MURPHY

AUTORS DEL TREBALL:

Rubén Calero, Adriana Jiménez, Judith Sanz i Jorge Sevillano

TUTORA DEL TREBALL:

Arantxa Aráiztegui

Índex

| | |
|--|-----------|
| Introducció..... | Pàgina 3 |
| Per què aquest projecte? | Pàgina 4 |
| Hipòtesis | Pàgina 5 |
| Fonaments matemàtics pel desenvolupament del treball | Pàgina 6 |
| Definicions de probabilitat | Pàgina 6 |
| Llei dels grans nombres | Pàgina 8 |
| Fal·làcia del jugador | Pàgina 9 |
| Com hem llençat les torrades | Pàgina 10 |

INTRODUCCIÓ

Hi ha lleis com les *Lleis de Murphy*, on estan recollides moltes de les creences populars, però que no utilitzen el mètode científic ja que no pot haver-hi una etapa de formulació d'una conclusió lògica.

El nostre projecte tractarà sobre l'estudi de la caiguda de les torrades depenent del condiment amb què està untada i l'alçada des que s'efectua la caiguda de la torrada.

Hem decidit fer aquest projecte perquè és un tema proper ja que a tots, en major o menor grau, ens ha passat alguna vegada.

El que nosaltres volem demostrar és si les torrades sempre cauen de la mateixa manera i si el condiment amb el qual hem recobert la torrada i la altura a la qual s'efectua el llançament influeixen en quina cara de la torrada tocarà el terra.

La ciència de la *Llei de Murphy*

"Si alguna cosa pot sortir malament, sortirà malament."

Aquesta expressió és ben coneguda i sovint és anomenada *Llei de Murphy* no ofereix un humor pessimista, sinó una explicació quan tot sembla anar malament. Per exemple, quan una torrada cau d'una taula. Per què el costat de la torrada amb mantega cau cap avall? És tot una coincidència?

Robert Matthews, va posar a prova la teoria deixant caure trossos de fusta de la mateixa mida sobre una taula. Després ho va fer amb pa torrat amb mantega. Ell va trobar que sí que hi ha una relació amb allò que passava amb les torrades i el que abans havia provat amb taules de fusta, però no en va saber deduir ni la causa, ni si hi havia una relació altura-caiguda, ni la relació que existia perquè una torrada caigués del costat del condiment untat o del seu costat nuu; només va poder concloure que el costat del condiment té més tendència a caure mirant al terra.

Per què aquest projecte?

El nostre projecte, ja hem dit que tractava sobre la caiguda de torrades, però no va ser així des del principi. La primera idea va ser estudiar la manera en què els nostres companys s'asseuen a classe però vam pensar que era molt difícil mesurar la manera de seure en una cadira i, a més, després hi havia poques coses per poder fer un estudi estadístic, llavors vam decidir no fer aquest estudi. La segona idea va sorgir al cap de pocs dies: l'estudi de les dietes dels companys. Mitjançant l'estadística podríem haver fet un bon estudi però no ens va acabar de convèncer la idea.

Després van haver idees diverses sobre temes en els quals ens anàvem adonant que l'estadística tenia poc o res a veure, així que no les vam escollir. Finalment, ens vam proposar la idea d'estudiar la caiguda de torrades. Al principi, no ho vèiem molt clar i no ens convencia, però quan ens ho vam parar a pensar va resultar ser un tema del qual podíem obtenir molts coneixements sobre l'estadística, de fet la nostra professora ens va proposar estudiar una mica més alguns conceptes de probabilitat que ens semblaven força interessants; també la forma de calcular i els resultats que s'obtenen amb les probabilitats, a més a més ens causava curiositat, així que finalment el vam escollir.

Aquí presentem les dues raons principals per les quals vam escollir aquest treball:

- Demostrar si aquesta llei de Murphy era certa o falsa.
- Aprendre a utilitzar la llei dels grans nombres per investigar el que passarà a fenòmens de la vida quotidiana.

Aquestes són les dues raons, que al cap i a la fi, són les que nos i noies de 14 i 15 anys trobem curioses i, que adjuntant-les amb l'estadística, podem resoldre.

Hipòtesis:

Abans de començar la investigació, el que el grup creia era que totes les torrades al caure ho fan sempre per causa de l'atzar i que caure cap a dalt o cap a terra tenen ambdues la mateixa probabilitat, és a dir, que si llencéssim 10000 torrades, 5000 caurien bocaterrosa i 5000 caurien cap a dalt.

Després ens vam plantejar la idea que potser l'alçada des de la qual es llença la torrada influeix a la caiguda de la torrada, perquè si hi ha més alçada li donaria temps a fer una volta sencera. Llavors potser quan l'altura és menor cauria per la part que no ha sigut llençada, i quan s'augmenta l'altura cauria de la mateixa cara que la haguéssim llençat.

Una altra hipòtesi que també vam plantejar, és que, potser, depenent del tipus de substància untada, la caiguda seria diferent, ja que la densitat de les substàncies, podria fer que caigués d'una manera o d'una altra.

Amb el desig de comprovar aquestes hipòtesis vam començar a fer el nostre treball d'experimentació. Però abans de tot, volíem saber quina seria la forma de demostrar després d'una manera científica les nostres hipòtesis. Per preparar-ho bé, vam buscar una mica d'informació sobre conceptes de tipus matemàtic, relacionats amb la probabilitat que després podríem fer servir per justificar els resultats.

Fonaments matemàtics

pel desenvolupament del treball

Definicions de probabilitat

Anomenem probabilitat al procés aleatori que és la raó entre el nombre de casos favorables d'un esdeveniment i el nombre de casos possibles. La probabilitat la fem servir en diverses àrees com l'estadística, la física, les matemàtiques i la filosofia.

Per calcular la probabilitat utilitzem una fórmula que diu que la freqüència relativa d'un esdeveniment. A és igual al nombre de vegades que apareix aquest esdeveniment, partit del nombre de vegades que es realitza l'experiment.

$$\text{Fr}(\Delta) = \frac{\text{El número de vegades que apareix } \Delta}{\text{El número de vegades que es realitza l'experiment}}$$

$$\text{Fr}(\Delta) = \frac{\text{El número de vegades que cau de cara o bocaterrosa}}{\text{El número de vegades que es realitza l'experiment}}$$

Altres definicions importants de probabilitat al llarg de la història

La definició de Laplace: Pierre Simon Laplace va ser un astrònom, físic i matemàtic francès que va inventar i desenvolupar la transformada de Laplace i la equació de Laplace. Laplace va morir a París als 78 anys, el 5 de Març de 1827.

La definició de Laplace o l'equació de Laplace ens diu que sigui E un experiment qualsevol i S el conjunt finit dels seus resultats possibles tal que

$S = a_1, \dots, a_k$, si suposem que cada resultat és equiprobable (és a dir, que ningú tingui més oportunitats que altre), la probabilitat de cadascú d'aquests esdeveniments és $1/k$ i la suma de totes les probabilitats és igual a 1.

$$P(S) = 1 = \sum_{i=1}^k P(a_i)$$

Aquest sumatori ens diu que la suma de la probabilitat que les torrades caiguin cap a dalt més la probabilitat que caiguin bocaterrosa sempre és igual a 1.

-La definició axiomàtica:

Aquesta fórmula es deu a Kolmogórov que va ser un matemàtic rus molt important gràcies als progressos que va fer en els camps de la teoria de la probabilitat i de la topologia. La definició axiomàtica és un pilar bàsic de la teoria de la probabilitat desenvolupada a partir de la teoria dels conjunts. Kolmogórov va morir a Moscou, l'any 1987 als 84 anys.

La definició axiomàtica diu que sigui E l'espai mostral de cert experiment aleatori. La probabilitat de cada esdeveniment és un número real que verifica els següents axiomes:

- 1- Qualsevol que sigui l'esdeveniment A, la probabilitat d'aquest esdeveniment serà major o igual a 0.

$$P(A) \geq 0$$

- 2- Si dos esdeveniments son incompatibles, la probabilitat de la seva unió és igual a la suma de les seves probabilitats.

- 3- La probabilitat total de l'espai mostral, és a dir de tots els possibles resultats junts serà igual a 1.

$$P(E) = 1$$

La llei dels grans nombres

La Llei dels Grans Nombres o Llei de l'atzar es deu al matemàtic i científic suís Jakov Bernoulli, que al segle XVII ja va estudiar les probabilitats i va escriure un tractat que es diu "Ars Conjectandi" que conté la famosa llei dels grans nombres.

Aquesta llei diu que com més vegades realitzem un experiment, més s'aproxima la seva freqüència relativa, és a dir, el nombre de vegades que apareix dividit pel nombre de vegades que fem l'experiment, a la seva definició de probabilitat. Aquesta llei, literalment, està escrita així:

"Quan el nombre d'observacions d'un fenomen aleatori és molt gran, la freqüència d'un esdeveniment associat amb aquest s'aproxima progressivament a un valor determinat. Aquest valor s'anomena probabilitat de l'esdeveniment."

Gràcies a aquesta llei podem, experimentalment:

- Comprovar si són vàlides o no les probabilitats que vam creure que ens sortirien.
- Obtenir de manera aproximada les probabilitats de que caigui bocaterrosa o boca dalt la torrada.

La fal·làcia del jugador:

Una fal·làcia, és una idea, que aparentment sembla correcta, però que en realitat és falsa. Aquesta fal·làcia, diu que els fets passats afecten els futurs -al menys en els fenòmens aleatoris- però com hem dit, és una idea errònia.

Aquesta idea en particular, ens vol transmetre quatre coses que, aparentment, semblen correctes però, repetim, són falses:

- Un acte aleatori té més possibilitats de passar perquè fa temps que no passa.
- Un acte aleatori té menys possibilitats de passar perquè fa temps que no passa.
- Un acte aleatori té més possibilitats de passar si ha passat fa poc temps.
- Un acte aleatori té menys possibilitats de passar si ha passat fa poc temps.

Els raonaments anteriors són falsos però el fet que alguna gent es creuria que no ho són ha provocat que molts estudis hagin anat dirigits a profunditzar-hi. Aquesta fal·làcia es diu així perquè molts jugadors perden diners perquè el seu instint es creu aquesta teoria.

Aquesta fal·làcia la podem aplicar al nostre treball perquè hi ha gent que:

- Creu que si mai li ha caigut la torrada a terra, li pot caure en qualsevol moment.
- Creu que com mai li ha passat, ara tampoc li passarà.
- Creu que com fa poc li ha caigut, l'hi pot tornar a caure a terra.
- Creu que com li ha caigut fa poc, ara no l'hi pot tornar a caure.

Com hem llençat les torrades?

Per fer aquest treball necessitàvem llençar un gran nombre de torrades, i per fer-ho, volíem que totes caiguessin des d'unes alçades determinades i a una força i velocitats també fixes, així que vam crear un aparell que mitjançant un sistema de frontisses, faria caure les torrades sempre amb la mateixa força.

Per fer-ho vam utilitzar els següents materials i eines:

- Cartró ploma:

Un material resistent i poc contaminant amb el qual vam fer l'estructura principal i els reforços annexos.

- Dos pals de recollidor:

Vam pensar que havia de ser una cosa no molt cara, però a la mateixa vegada, resistent. Els vam utilitzar per fer que no caigués l'estructura principal.



Figura 1: Tallant el cartró ploma amb el cúter.



Figura 2: Fixant els pals de recollidor i els reforços.

- Un cúter:

Vam provar amb diverses eines però el cúter va ser ideal per tallar el cartró ploma.

- Cinta de cocodril:

Per poder agafar peces de cartró ploma i els pals de recollidors, necessitàvem una cinta aïllant però amb deu vegades més resistència, i llavors el pare d'un

membre del grup ens va oferir aquest material i molts altres.

- La base dels recollidors: Ens van servir per sostenir tota l'estructura, ja que per la seva forma, podien fer de base perfectament.
- Dues frontisses mòbils de metall: Per tal de poder llençar les torrades, vam adherir amb cinta de cocodril aquestes peces ja que hi vam posar dues a diferents alçades.

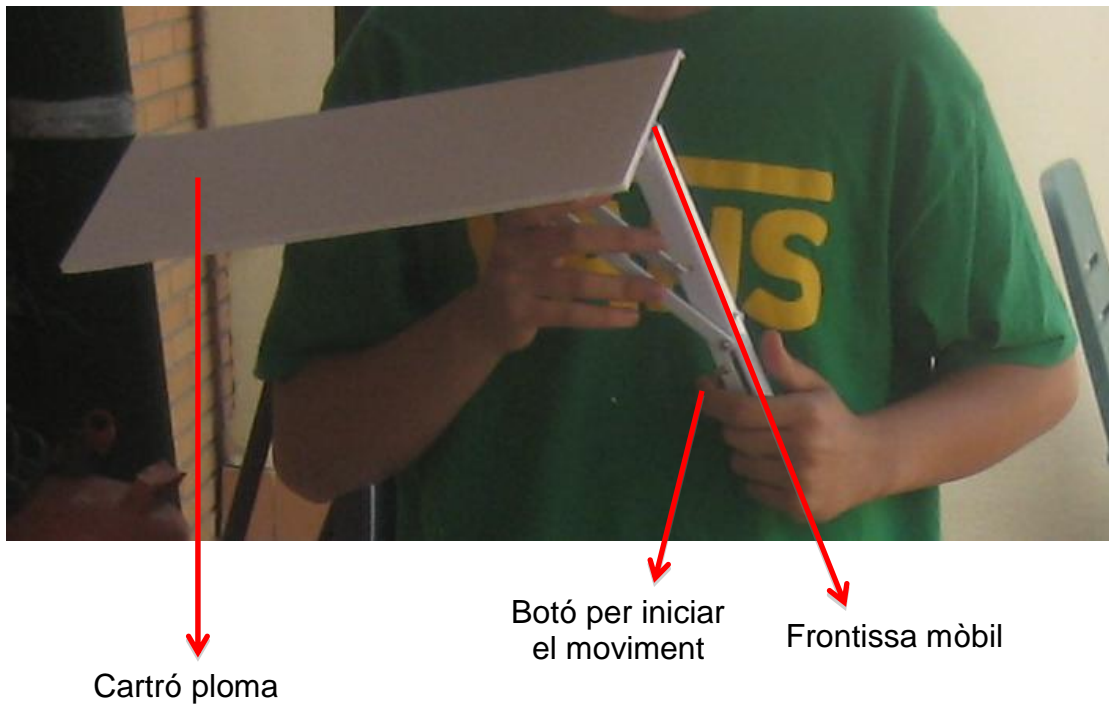


Figura 3: Part mòbil on posem les torrades perquè caiguin.



Experimentació amb les torrades

Després de construir el llançador de torrades, vam començar amb l'experiment. Com que volem comprovar si hi ha cap efecte causat pel producte que apliquem a la torrada, vam pensar en experimentar llençant torrades untades amb margarina, amb melmelada i amb crema de cacau.

I per altra banda, per comprovar si realment hi ha cap efecte per causa de l'altura. Vam pensar en experimentar amb dues altures: 1,20m ja que és l'altura aproximada a la qual es porta un plat amb torrades, i des de 0,80m ja que és l'alçada mitjana d'una taula.

De cada cas, vam realitzar 100 llançaments, nombre que vam pensar ja era suficientment significatiu com per poder apropar-nos a la probabilitat real de l'esdeveniment, com diu la llei dels grans nombres.

Els resultats obtinguts són els següents:

| Pa de pessic | Margarina | | Melmelada | | Crema de cacau | |
|--------------|-----------|--------|-----------|--------|----------------|--------|
| | 1'20m | 0'80m | 1,20m | 0,80m | 1,20m | 0,80m |
| | 47/100 | 65/100 | 60/100 | 82/100 | 38/100 | 53/100 |

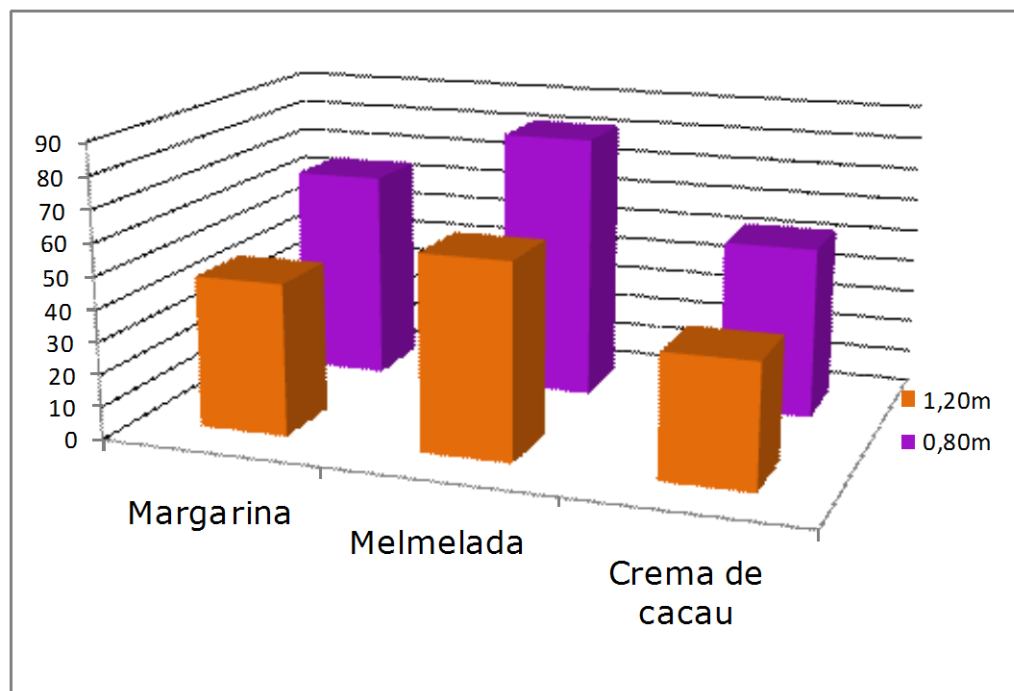
Hem utilitzat un gràfic i una taula per representar el nombre de torrades que han caigut bocaterrosa sobre els cent intents efectuats.

A la taula, podem veure els resultats que surten al gràfic. Quan vam llençar les 100 torrades amb margarina, des de l'alçada d'1'20m, van sortir 47 torrades bocaterrosa, i des de l'alçada de 0'80m, 65 van caure bocaterrosa.

A la part de melmelada, es veu com van caure 60 i 82 torrades a alçades d'1'20m i 0'80m respectivament mirant cap avall.

A l'última columna, les torrades untades amb crema de cacau van caure 38 des de 1'20 i 53 des de 0'80m.

Al gràfic, la columna que hi ha a l'esquerra, de color taronja, indica les torrades que han caigut bocaterrosa a una alçada de 1,20m. Així, per exemple, quan vam llençar torrades amb margarina, 47 torrades de les 100 que eren en total, van caure bocaterrosa. Pel contrari, la barra de color lila ens indica el nombre de torrades caigudes des de 0,80m.



Resultats obtinguts per l'experimentació amb margarina

Hem començat untant les torrades amb margarina des de l'alçada 1'20m, que és aproximadament l'alçada a la qual portem el plat amb torrades.

El resultat ens va sorprendre gratament, ja que després de l'experiment vam concloure que la probabilitat de cada esdeveniment era efectivament molt propera a 0,5.

$$p(\text{caure bé}) = 53 / 100 = 0.53$$

$$p(\text{caure bocaterrosa}) = 47/100 = 0.47$$

Això confirmava la nostra hipòtesi, ja que no vam trobar significativa la diferència entre les dues probabilitats i vam concloure que la forma en què cauen les torrades és només cosa de l'atzar.

Després de llençar les torrades des de l'alçada de 0,80m, és a dir, des de l'alçada que cauen les torrades des d'una taula d'alçada mitjana, vam veure que els resultats ja no eren els mateixos, de fet 68 torrades de cent que vam llençar van caure boca avall. Aquest resultat confirmava la segona hipòtesi que deia que l'altura des de la qual fem l'experiment influeix en el resultat obtingut, però feia trontollar la primera hipòtesi que deia que tot era qüestió de l'atzar, al contrari, reforçava la llei de Murphy que diu que quasi sempre cau del costat untat.

Resultats obtinguts per l'experimentació amb melmelada

Quan vam començar amb la melmelada vam pensar que en ser un condiment amb més densitat s'untaria d'una manera més irregular, i així, que la caiguda de la torrada dependria més de com les untéssim, és a dir, d'on haguéssim posat més condiment i d'on menys. Pensàvem que caurien com van caure amb la mantega, meitat i meitat, però van caure 60 torrades bocaterrosa, un resultat molt aproximat a l'anterior amb la margarina.

Els resultats ja no eren tan propers a la probabilitat proposada així que la nostra idea cada vegada era més allunyada.

$$p(\text{caure bé}) = 60 / 100 = 0.6$$

$$p(\text{caure bocaterrosa}) = 82/100 = 0.82$$

A la segona part creïem que caurien el 60% bocaterrosa, com ens estava passant als últims resultats, en canvi, van caure 82 torrades boca avall, és a dir, confirmaven encara més la llei de Murphy.

Resultats obtinguts per l'experimentació amb crema de cacau

Amb la crema de cacau, les nostres idees eren que es repetirien aproximadament els anteriors resultats de la margarina, ja que tenen la mateixa densitat.

Ens va passar el contrari, van caure 38 torrades bocaterrosa, resultat que va fer que ens estranyéssim, ja que sobtava que hi hagués més torrades que haguessin caigut boca d'alt.

Després, 53 de les 100 que vam llençar des de l'altura d'1,20 m, van caure bocaterrosa. Això va fer que es confirmés que la crema de cacau alterava els resultats anteriors i feia que no tingués sentit la llei de Murphy perquè va sortir un resultat de menys torrades bocaterrosa que boca dalt.

Els últims resultats per a la alçada de 0'80m, ens van donar la idea més propera a la que nosaltres proposàvem, ja que donava 0'53, és a dir, que per 3 torrades, no aconseguim la probabilitat real. Després vam llençar les 100 torrades a 1'20m i ens va donar una probabilitat de 0'38, cosa que s'allunyava molt de la nostra primera hipòtesi.

Conclusió Estadística

A partir dels resultats, ens hem adonat del fet que sí que hi ha una relació demostrable científicament pel fet de com cau una torrada depenen de l'alçada a la que es llençada o el producte amb el qual han estat untades.

Depenent de l'alçada, cauen d'una manera o d'una altra, però com menys altura, més cauen bocaterrosa, suposadament perquè no els hi dona temps per donar una volta sencera. El fet és matemàtic, la diferència de torrades que cauen bocaterrosa mirant la taula és aproximadament d'un 20% més que les que cauen boca avall amb menys alçada.

La nostra tercera conclusió és que la hipòtesi en la que dèiem que l'alçada de llançament de la torrada influeix en com cauen les torrades, és certa, ja que a l'alçada d'1'20m es compleix que n'hi ha un 20% menys de probabilitats que caiguin bocaterrosa.

Conclusió del treball

A partir d'aquest treball, hem après que l'estadística no és només un model per a calcular tota una sèrie de coses, sinó que és també un mètode de vida que ens facilita molt les activitats quotidianes, com per exemple el nostre treball que tracta d'una manera que un alumne de 3er d'ESO pot entendre. També hem après a treballar en grup d'una manera ordenada.

En resum podem dir que ha sigut una molt bona experiència que a part de coneixements ens ha permès passar molt bones estones entre nosaltres i amb la nostra tutora.

Agraïments

Aquest treball no hauria estat possible gracies a la ajuda de la nostra professora Arantxa per explicar-nos coses que no enteníem i dubtes matemàtiques; a la Yolanda, professora d'informàtica que ens ha deixat la aula per poder treballar en grup; a la Cristina, professora de català per corregir-nos les faltes i llegir tot el treball, i per últim el pare de una de les companyes del grup per deixar-nos fer el llançador de torrades, deixar-nos eines i material per utilitzar-los i també per utilitzar el seu ordinador per fer el treball.

Webgrafia

www.wikipedia.com

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Atzar_i_probabilitat/atzar_i_probabilitat_2.htm

<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/usr/apdorta/murphy.htm>

<http://www.elrefugiodelaplaya.com/frases/ley-de-murphy.htm>

<http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html>